UNIVERSITE HASSAN-II MOHAMMEDIA
Faculté des Sciences et Techniques

Département de Mathématiques

Concours d'accès en première année de la filière IMIAF 2012/2013

Durée: 2 heures

Note: .../20

Aucun document n'est autorisé. Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats et à donner des démonstrations complètes de leurs affirmations.

Exercice. 1

Soit la la forme différentielle: $\omega(x,y) = (y - \frac{1}{3}x^3)dx + (x + y^3)dy$.

1. *Montrer que* ω *est forme différenticlle exacate sur* $\mathbb{R}^2$.
2. *Déterminer une fonction* f, *de deux variables, définie sur* $\mathbb{R}^2$ *différentiable telle que*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \omega(x,y) = df(x,y).$$

3. *Endéduire la solution générale implicite de l'équation différentielle:* $(x + y^3)y' + (y - x^3) = 0$.

Exercice. 2

On considère une variable aléatoire X *définie sur* (Ω, A, P), *prenant ses valeurs dans* $\mathbb{N}^*$ *et, pour tout entier naturel non nul* n, *on pose:* $a_n = P([X = n])$. *On désigne par* f *la fonction définie sur l'intervalle* $[0,1]$ *par:* $\forall x \in [0,1], \ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

1. (a) *Justifier que la suite* $(a_n)_{n\geq 1}$ *est une suite de nombres réels positifs ou nuls vérifiant* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$.

   (b) *Montrer que, pour tout nombre réel* x *appartenant à l'intervalle* $[0,1]$, *la série de terme général* $a_n x^n$ *est convergente.*
2. *Dans cette question, on suppose que la fonction* f *est dérivable au point* 1; *elle vérifie donc:*

$$\lim_{x \to 1, x<1} \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = f'(1).$$

(a) *Etablir pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,1[$ l'égalité :*

$$\frac{f(1)-f(x)}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \Big(\sum_{k=0}^{k=n-1} x^k \Big)$$

(b) *En déduire que la fonction $x \to \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x}$ est croissante sur $[0,1[$ et qu'elle vérifie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,1[$ les inégalités suivantes:* $0 \leq \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x} \leq f'(1)$.

(c) *Montrer que, pour tout entier naturel N non nul, on a :* $0 \leq \sum_{n=1}^{N} n a_n \leq f'(1)$. *En déduire que la série de terme général na_n est convergente.*

Exercice. 3

Pour tout entier naturel non nul n , on note la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$.
On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

A) Étudier les variations de f_n sur $[0, +\infty[$. Pour $n > 2$, étudier la position relative de C_n et de C_{n-1} et vérifier que le point de C_n , $A(n; f_n(n))$ est aussi sur C_{n-1} .

B) Étude de la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = f_n(n)$.

1. *En utilisant les résultats de la partie A), montrer que la suite (u_n) est décroissante.*
2. *Soit g la fonction définie sur $[0;1]$ par :* $g(t) = \ln(1+t) - t + \dfrac{t^2}{4}$.
   (a) *Montrer que pour tout t de $[0;1]$,* $\ln(1+t) \leq t - \dfrac{t^2}{4}$.
   (b) *En déduire que pour tout entier $n \geq 1$,* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leq e^{1-\frac{1}{4n}}$
3. (a) *Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq e^{-\frac{1}{4n}}$.
   (b) *En déduire que pour tout entier $n \geq 2$,* $u_n \leq e^{-1-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)}$.
4. (a) *Montrer que pour tout entier $n \geq 2$;* $\int_1^n \dfrac{dt}{t} \leq 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n-1}$.
   (b) *En déduire que pour tout entier $n \geq 2$,* $u_n \leq e^{-1-\frac{1}{4}\ln(n)}$. *Quelle est la limite de la suite la suite (u_n) ?*

Notation: Exercice.1.(4 points); Exercice.2.(7 points); Exercice.3.(9 points)